Sinn und Bedeutung von Termen

G. Frege untersucht *die Gleichheit von Gegenständen a und b als Zeichen*, $a =_{Zeichen} b$, wobei *Zeichen, Namen* „einen Eigennamen vertreten, deren Bedeutung ein Gegenstand (im weitesten Sinn) ist“ (S.41).

Einem Zeichen a kann zugeordnet sein:

eine *Vorstellung* $\langle\!|\, a \,|\!\rangle$,
ein *Sinn* $\{\!|\, a \,|\!\}$,
eine *Bedeutung* $[\![a]\!]$.

Mit dem Sinn definiert man die Zeichengleichheit:

$$t =_{Zeichen} s \quad :\Longleftrightarrow \quad \{\!|\, t \,|\!\} = \{\!|\, s \,|\!\}.$$

Def 1 Der *Sinn* $\{\!|\, t \,|\!\}$ des Zeichens t ist die *Art des Gegebenseins seiner Bedeutung*. Die *Bedeutung* $[\![t]\!]$ *des Zeichens* t ist der mit t bezeichnete Gegenstand.

Def 2 Ein Term t *drückt* den Sinn $\{\!|\, t \,|\!\}$ *aus* und *bezeichnet* die Bedeutung $[\![t]\!]$.

Freges Annahmen über Sinn und Bedeutung von Termen

(i) Der Sinn $\{\!|\, t \,|\!\}$ hängt von einem *Kontext* Γ ab:

$$\{\!|\, t \,|\!\}_\Gamma.$$

Daher: jedes Vorkommen von t in einem Ausdruck φ kann einen anderen Sinn haben.

(ii) Der Sinn $\{\!|\, t \,|\!\}$ existiert immer und ist unabhängig von der Bedeutung $[\![t]\!]$.

(iii) Die Bedeutung hängt funktional vom Sinn ab, existiert aber nicht immer: es gibt eine partielle Funktion E mit

$$[\![t]\!] = E(\{\!|\, t \,|\!\}).$$

Daher: Falls $\{\!|\, a \,|\!\} = \{\!|\, b \,|\!\}$, so ist

$$[\![a]\!] = E(\{\!|\, a \,|\!\}) = E(\{\!|\, b \,|\!\}) = [\![b]\!].$$

Die Beispiele für Terme sind bei Frege meist definite Beschreibungen, $\iota x.\varphi$ mit Aussagen φ. z.B. *der von der Erde am weitesten entfernte Himmelskörper*, oder *der Schnittpunkt der Geraden a und b*.

Gerader und ungerader Gebrauch

Wörter haben in der direkten Rede *gewöhnliche* oder *gerade* Bedeutung/Sinn und in der indirekten Rede *ungewöhnliche* oder *ungerade* Bedeutung/Sinn:

„Wenn man in der gewöhnlichen Weise Worte gebraucht, so ist das, wovon man sprechen will, deren Bedeutung“:

$$P(t): \qquad [\![t]\!] \in \textit{Umfang von } P.$$

Wenn man von den Worten selbst oder ihrem Sinn reden will, gebraucht man sie in ungewöhnlicher Weise:

$$\begin{aligned}
&\textit{a sagte: „}\varphi\textit{“}:\\
&\qquad [\![\varphi]\!]_\Gamma = \varphi, \quad \text{für } \Gamma = \textit{a sagte: „}\cdot\textit{“}\\
&\textit{a glaubt, daß } \varphi:\\
&\qquad [\![\varphi]\!]_\Gamma = \{\!|\,\varphi\,|\!\} \quad \text{für } \Gamma = \textit{a glaubt, daß } \cdot\\
&\qquad\qquad \in \{g \mid \textit{a hält den Gedanken g für wahr.}\}
\end{aligned}$$

Gewöhnlicher Gebrauch: a,
ungewöhnlicher Gebrauch: „a“ bzw. *der Sinn von a.*

Kompositionsprinzipien für Sinn und Bedeutung

Frege macht folgende (zu präzisierende) Annahmen:

(i) *Kompositionsprinzip für* $\{\!|\cdot|\!\}$: Der Sinn eines Satzes hängt nur vom Sinn, nicht von der Bedeutung seiner Teilausdrücke ab.

(ii) *Kompositionsprinzip für* $[\![\cdot]\!]$: Die Bedeutung eines Satzes hängt nur von der Bedeutung, nicht vom Sinn seiner Teilausdrücke ab.

(iii) *Striktheit der Bedeutung* $[\![\cdot]\!]$: Existiert $[\![\varphi]\!]$, so auch $[\![a]\!]$ für alle Teilausdrücke a von φ.

Die Kompositionsprinzipien besagen: $\{\!|\,\varphi\,|\!\}$ bzw. $[\![\varphi]\!]$ kann rekursiv über den Aufbau von φ (und dem impliziten Kontext Γ) definiert werden.

Sinn und Bedeutung von Aussagen

(i) Der Sinn $\{\!|\,\varphi\,|\!\}$ eines Behauptungssatzes φ ist ein *Gedanke.*

(ii) Die Bedeutung $[\![\varphi]\!]$ eines Behauptungssatzes φ ist ein *Wahrheitswert.*

	Name t	Satz φ
Vorstel-lung	$\langle\!\vert\, t \,\vert\!\rangle$ (subjektiv, zeitlich)	Bild $\langle\!\vert\, \varphi \,\vert\!\rangle$ (subjektiv)
Sinn	Art $\{\!\vert\, t \,\vert\!\}$ d. Gegebenseins $t \mapsto \{\!\vert\, t \,\vert\!\}$ ist total	Gedanke $\{\!\vert\, \varphi \,\vert\!\}$ $\varphi \mapsto \{\!\vert\, \varphi \,\vert\!\}$ ist total
Bedeu-tung	Gegenstand $[\![t]\!]$ $t \mapsto [\![t]\!]$ ist partiell	Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]$ $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]$ ist partiell

Warum ist $[\![\varphi]\!]$ kein Gedanke?

Beh. 1 Die Bedeutung $[\![\varphi]\!]$ eines Aussagesatzes φ ist nicht der in ihm enthaltene Gedanke.

Beweis: Der in φ enthaltene Gedanke kann sich ändern, wenn man in φ einen Namen a durch einen Namen b mit $\{\!|\, a \,|\!\} \neq \{\!|\, b \,|\!\} \wedge [\![a]\!] = [\![b]\!]$ ersetzt, z.B. bei

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \text{„}\textit{x ist ein von der Sonne} \\ &\qquad \textit{beschienener Himmelskörper}\text{“}, \\ a &= \textit{der Morgenstern}, \\ b &= \textit{der Abendstern}. \end{aligned}$$

Nach dem Kompositionsprinzip ist

$$[\![\varphi[a/x]]\!] = [\![\varphi[b/x]]\!],$$

aber ggf.

$$[\![A \textit{ glaubt } \varphi[a/x]]\!] = 1 \neq 0 = [\![A \textit{ glaubt } \varphi[b/x]]\!].$$

Also kann „der in φ enthaltene Gedanke“ nicht seine Bedeutung sein (wenn der Glaubensinhalt[8] *der in φ enthaltene Gedanke* ist). □

[8] Das Argument zeigt, daß die Termpositionen in Komplementsätzen von Glaubensprädikaten nicht extensional sind.

Da nur zwischen der *Bedeutung* $[\![\varphi]\!]$ und dem *Sinn* $\{\!|\varphi|\!\}$ von φ unterschieden werden soll, muß *der in* φ *enthaltene Gedanke* $= \{\!|\varphi|\!\}$ sein.

Es gibt Aussagesätze ohne Bedeutung, insbesondere die, in denen Terme vorkommen, die keine Bedeutung haben.[9] Außerdem haben Befehlssätze nur einen Sinn, aber keine Bedeutung.[10]

[9] Aber auch paradoxe Sätze wie der Lügnersatz *Dieser Satz ist falsch*, dessen Terme alle eine Bedeutung haben. Oder soll man sagen, er enthält den nicht-denotierenden Term *dieser Satz = der durch diesen Satz ausgedrückte Gedanke*?

[10] Das würde man heute wohl nicht mehr so sehen: die Bedeutung eines Befehls ist die Gesamtheit der durch seine Ausführungen bewirkten Zustandsveränderungen.

Bedeutung von Begriffen

Im Nachlaß von Frege wird die Unterscheidung auf Begriffe ausgedehnt.

(i) „Ein *Begriff* B ist eine Funktion eines Arguments, deren Wert ein Wahrheitswert ist.“

$$\begin{array}{lcl} \textit{Begriff } B & = & B : V \to \{0,1\}, \\ \textit{Umfang } U(B) & := & \{v \in V \mid B(v) = 1\}. \end{array}$$

Jedes $U \subseteq V$ ist Umfang eines Begriffs:

$$\chi_U(v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \in U, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} .$$

(ii) Die *Bedeutung* $[\![A]\!]$ eines Begriffsworts A ist der Begriff

$$v \mapsto [\![A(x)]\!][v/x].$$

Falls nicht für jedes a eindeutig bestimmt ist, ob a zum Umfang von A gehört oder nicht, hat der Begriff *keine Bedeutung*.

Gleichheit von Gegenständen

Zwei Gegenstände sind gleich, wenn sie unter dieselben Begriffe fallen:

$$a = b :\iff \forall B\,(B(a) = 1 \iff B(b) = 1).$$

Das ist eine Form der Definition von Leibniz:

Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate.

D.h. für Namen mit Substitution, Aussagen und Bedeutung gesagt:

$$s = t :\iff \forall\varphi(x)(\llbracket\varphi[s/x]\rrbracket = \llbracket\varphi[t/x]\rrbracket).$$

Gleichheit von Begriffen

Frege: Zwei Begriffe sind gleich, wenn sie denselben Umfang haben:

$$A = B :\iff \forall a\,(A(a) = 1 \iff B(a) = 1).$$

Trotzdem unterscheidet Frege den *ungesättigten* Begriff von seinem (gesättigten) Umfang, einem Gegenstand.

Der Sinn von Begriffen

„Die Logik muss sowohl vom Eigennamen wie vom Begriffsworte fordern, dass der Schritt vom Worte zum Sinne und der vom Sinne zur Bedeutung unzweifelhaft bestimmt sei.“

„So bezieht sich der Eigenname durch Vermittlung des Sinnes und nur durch diese auf den Gegenstand.“

$$t \mapsto \{\!|\, t \,|\!\}_\Gamma \mapsto [\![t]\!]_\Gamma.$$

Frege sagt nicht, was der Sinn eines Begriffs sein soll. Die Grundidee ist aber offenbar:

Wir *erfassen den Sinn* von Namen t und Begriffswörtern A und können *deshalb* beurteilen, ob $[\![t]\!]$ unter den Begriff $[\![A]\!]$ fällt - sofern beide existieren.

Reichen uns $\{\!|\, A(t) \,|\!\}$ und *die Annahme,* $[\![t]\!]$ *und* $[\![A]\!]$ *existierten*, um $[\![A(t)]\!]$ zu bestimmen? Möglicherweise:

(i) Der *Sinn* $\{\!|\, t \,|\!\}_\Gamma$ eines Namens t ist das (durch t und Γ gegebene) *Verfahren*, $[\![t]\!]$ zu bestimmen.

(ii) Der *Sinn* $\{\!|\, A \,|\!\}_\Gamma$ eines Begriffsworts A ist das (durch A und Γ bestimmte) *Verfahren*, wie man von jedem v feststellt, ob $[\![A(x)]\!][v/x] = 1$ ist.

Kompositionsprinzip der Bedeutung

Für Aussagen $\varphi(t)$, mit ausgezeichnetem Vorkommen des Terms t, ist für eine passende Funktion $F_{\varphi(\cdot)}$

$$[\![\varphi(t)]\!]_\Gamma = F_{\varphi(\cdot)}([\![\varphi(\cdot)]\!]_\Gamma, [\![t]\!]_{\tilde{\Gamma}}),$$

wobei $\tilde{\Gamma}$ der Kontext bei der Auswertung des Vorkommens von t ist.

Beisp. Für Gemeinnamen A und Eigenname t ist

$$[\![A(t)]\!]_\Gamma = [\![A]\!]_\Gamma([\![t]\!]_\Gamma).$$

Hier ist also $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ und $F_{A(\cdot)}(B, v) := B(v)$ für Begriffe $B : V \to \{0, 1\}$ und Objekte $v \in V$

Wenn man Begriff und Umfang identifiziert:

$$[\![t \text{ ist ein } A]\!]_\Gamma = \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![t]\!]_\Gamma \in [\![A]\!]_\Gamma, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bem. Peano hat $\in$ nach <u>ἐ</u>στίν benannt und $\subset$ nach *<u>c</u>onsequentia*.

Lemma 1 Für Terme s und t und Aussagen $\varphi(\cdot)$ gilt:

$$[\![s]\!]_\Gamma = [\![t]\!]_\Gamma \quad \Rightarrow \quad [\![\varphi(s)]\!]_\Gamma = [\![\varphi(t)]\!]_\Gamma,$$

sofern der Kontext $\tilde{\Gamma}$ von $\cdot$ in $\varphi(\cdot)$ sich nicht von Γ unterscheidet.

Beweis: Sei $a = [\![s]\!]_\Gamma$, $b = [\![t]\!]_\Gamma$ und $B = [\![\varphi(\cdot)]\!]_\Gamma$. Dann ist nach dem Leibniz-Prinzip

$$\begin{array}{rcll} [\![\varphi(s)]\!]_\Gamma & = & F_{\varphi(\cdot)}([\![\varphi(\cdot)]\!]_\Gamma, [\![s]\!]_{\tilde{\Gamma}}) & \text{(Komp.)} \\ & = & F_{\varphi(\cdot)}(B, [\![s]\!]_\Gamma) & (\tilde{\Gamma} = \Gamma) \\ & = & B(a) & \\ & = & B(b) & (a = b) \\ & = & F_{\varphi(\cdot)}([\![\varphi(\cdot)]\!], [\![t]\!]_{\tilde{\Gamma}}) & \\ & = & [\![\varphi(t)]\!]. & \end{array}$$

Statt $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ reicht $[\![s]\!]_{\tilde{\Gamma}} = [\![s]\!]_\Gamma$ und $[\![t]\!]_{\tilde{\Gamma}} = [\![t]\!]_\Gamma$. $\square$

Man schreibt heute $\varphi(x)$ und formuliert es als ein *Substitutionslemma*:

$$[\![\varphi(t)]\!]_\Gamma = [\![\varphi(x)]\!]_{\Gamma[[\![t]\!]_\Gamma/x]}$$

Gilt das Substitutionslemma für Teilsätze?

Frege untersucht dann, ob und wann bedeutungsgleiche Teilsätze austauschbar sind, d.h. ob auch gilt:

$$[\![\psi_1]\!]_\Gamma = [\![\psi_2]\!]_\Gamma \quad \Rightarrow \quad [\![\varphi(\psi_1)]\!]_\Gamma = [\![\varphi(\psi_2)]\!]_\Gamma.$$

In welchen Satzkontexten $\varphi(\cdot)$ kommt es nur auf die *Bedeutung* der Teilaussagen an, nicht auf ihren Sinn?

Mit *daß* eingeleitete Nennsätze

Bei Komplementsätzen von Verben R wie *sagen, hören, meinen, überzeugt sein, bedauern, hoffen, fürchten, billigen, sich freuen, daß* φ.

$$\begin{array}{rcl} [\![t\ R, \textit{daß}\ \varphi^{konj}]\!]_\Gamma & = & F_R([\![R]\!]_\Gamma, [\![t]\!]_\Gamma, [\![\varphi]\!]_{\tilde{\Gamma}}), \\ & := & [\![R]\!]_\Gamma([\![t]\!]_\Gamma, \{\!|\,\varphi\,|\!\}_\Gamma), \end{array}$$

wobei $[\![R]\!]_\Gamma : V \times \textit{Gedanken} \to \{0,1\}$. Ebenso bei:

- indirekter Rede (als impl. Komplementsätze),
- *es scheint (mir), daß* φ, und
- t *schließt* φ *aus (der Annahme, daß)* $\tilde{\varphi}$.

Adverbsätze des Zwecks

Ein Zweck zählt als Gedanke, daher:

$$\begin{aligned} &[\![\psi, \mathit{damit}\ \varphi^{konj}]\!]_\Gamma \\ &\quad = \quad F_{damit(\cdot,\cdot)}([\![\mathit{damit}]\!]_\Gamma, [\![\psi]\!]_{\tilde{\Gamma}_1}, [\![\varphi]\!]_{\tilde{\Gamma}_2}) \\ &\quad := \quad [\![\mathit{damit}]\!]_\Gamma([\![\psi]\!]_\Gamma, \{\!|\,\varphi\,|\!\}_{\tilde{\Gamma}_2}), \end{aligned}$$

wobei $[\![\mathit{damit}]\!]_\Gamma : \{0,1\} \times \mathit{Gedanken} \to \{0,1\}$.

Folgerung

Der Wahrheitswert $[\![t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi]\!]$ hängt nicht von $[\![\varphi]\!]$ ab und besagt nichts über $[\![\varphi]\!]$.

Daher ist in diesen Fällen i.a.

$$\begin{aligned} [\![s]\!] = [\![\tilde{s}]\!] \quad \not\Rightarrow \quad & [\![t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi[s/z]]\!] \\ & = [\![t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi[\tilde{s}/z]]\!]. \end{aligned}$$

Der Sinn $\{\!|\, t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi\,|\!\}$ ist ein einziger Gedanke, von dem $\{\!|\,\varphi\,|\!\}$ nur ein Teilgedanke ist.

Aber in diesen Fällen gilt stets

$$\begin{aligned} \{\!|\, s\,|\!\} = \{\!|\,\tilde{s}\,|\!\} \quad \Rightarrow \quad & [\![t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi[s/z]]\!] \\ & = [\![t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi[\tilde{s}/z]]\!]. \end{aligned}$$

Abhängige Fragesätze

Verben des *fragens*, *zweifelns* oder *nicht wissens* erzeugen indirekte Bedeutung.

a) bei eingebetteten Satzfragen:

$$
\begin{aligned}
&[\![t\ \textit{zweifelt, ob}\ \varphi^{\textit{konj}}]\!]_\Gamma \\
&\quad = \quad F_{\textit{bezweifeln}(\cdot,\cdot)}([\![\textit{bezweifeln}]\!]_\Gamma, [\![t]\!]_{\tilde{\Gamma}_1}, [\![\varphi]\!]_{\tilde{\Gamma}_2}) \\
&\quad := \quad [\![\textit{bezweifeln}]\!]_\Gamma([\![t]\!]_\Gamma, \{\!|\, \varphi \,|\!\}_{\tilde{\Gamma}_2}),
\end{aligned}
$$

wobei $[\![\textit{bezweifeln}]\!]_\Gamma : V \times \textit{Gedanken} \to \{0,1\}$.

b) bei eingebetteten Konstituentenfragen (W-Fragen):

$$
\begin{aligned}
&[\![t\ \textit{fragt, wer}_x\ \varphi(x)^{\textit{konj}}]\!]_\Gamma \\
&\quad = \quad F_{\textit{fragen}(\cdot,\cdot)}([\![\textit{fragen}]\!]_\Gamma, [\![t]\!]_{\tilde{\Gamma}_1}, [\![\textit{wer}_x\ \varphi(x)]\!]_{\tilde{\Gamma}_2}) \\
&\quad := \quad [\![\textit{fragen}]\!]_\Gamma([\![t]\!]_\Gamma, \{\!|\, \textit{wer}_x\ \varphi(x) \,|\!\}_{\tilde{\Gamma}_2}),
\end{aligned}
$$

wobei $[\![\textit{fragen}]\!]_\Gamma : V \times \textit{Objekt-Fragen} \to \{0,1\}$.

Was ist hier $\{\!|\, \textit{wer}_x\ \varphi(x) \,|\!\}_{\tilde{\Gamma}_2}$?

Bedeutung von Konstituentenfragen

Identifiziert man die Bedeutung einer Frage mit der Menge der Bedeutungen ihrer Antworten, so hat man:

$$[\![wer_x\ \varphi(x)]\!]_\Gamma \quad = \quad \{v \in V \mid [\![\varphi]\!]_{\Gamma[v/x]} = 1\},$$

d.h. die Bedeutung einer W-Frage ist der Umfang des durch die Frage definierten Begriffs

$$B : V \to \{0,1\} \qquad \text{mit} \quad B(v) := [\![\varphi]\!]_{\Gamma[v/x]}.$$

Da eine Frage ein „ungesättigter" Ausdruck ist, würde Frege wohl eher sagen, $[\![wer_x\ \varphi(x)]\!]_\Gamma$ *sei* der Begriff B.

Vielleicht sollte die Bedeutung der W-Frage aber die Menge der (korrekten) Antwort*terme* s sein:

$$\begin{array}{rcl} [\![wer_x\ \varphi(x)]\!]_\Gamma & = & \{s \mid [\![t\ kennt\ s]\!]_\Gamma = 1 = [\![\varphi(s)]\!]_\Gamma\} \\ & \neq & \{v \in V \mid [\![\varphi]\!]_{\Gamma[v/x]} = 1\}. \end{array}$$

Korrekte Antworten scheinen nur die Namen zu sein, deren Bedeutung $\varphi(x)$ erfüllt und der Fragende kennt.

Freie Relativsätze

Freie Relativsätze, die das Subjekt ihres Matrixsatzes bilden. *Der die elliptische Gestalt der Planetenbahnen entdeckte, starb im Elend.*

Es geht also um die definite Beschreibung. Ihre Bedeutung ist ein Objekt, kein Wahrheitswert:

$$\begin{aligned}[\![der_x\ \varphi(x^{rel})^{ind}]\!]_\Gamma &= [\![\iota x.\varphi]\!]_\Gamma \\ &:= \quad das\ v \in V\ \ mit\ [\![\varphi]\!]_{\Gamma[v/x]} = 1\end{aligned}$$

Der Sinn von $\{\!|\ der_x\ \varphi(x^{rel})^{ind}\ |\!\}_\Gamma$ ist kein Gedanke, sondern

$$\{\!|\,\iota x.\varphi\,|\!\}\ \text{ist}\ \textit{die Art, wie}\ [\![\iota x.\varphi]\!]\ \textit{gegeben ist.}$$

Frege an Russell (28.12.1902) „Es kommt oft vor, dass verschiedene Zeichen denselben Gegenstand bezeichnen und doch nicht unbedingt vertauschbar sind, *indem sie den Gegenstand in verschiedener Weise bestimmen.* Man könnte sagen: *sie führen von verschiedenen Seiten auf ihn hin.*“

Restriktive Relativsätze

Auch Beisätze, d.h. restriktive Relativsätze wie in

die Quadratwurzel aus 4, *die kleiner ist als 0*,

haben als Bedeutung keinen Wahrheitswert und als Sinn keinen Gedanken, nur „einen Gedankenteil".

Der Teilsatz ist eine *Formel* $\varphi(x)$ mit einer freien Variablen x. Er drückt ein Merkmal des Gesamtbegriffs

Quadratwuzel aus 2, die kleiner ist als 0,

aus und damit eine Eigenschaft der darunter fallenden Objekte. Daher

$$\begin{aligned}
&[\![das_x\ N, \varphi^{rel,ind}(x^{rel})]\!]_\Gamma \\
&\quad = [\![\iota x.(N(x) \wedge \varphi(x))]\!]_\Gamma \\
&\quad = F_{\iota x:N.\varphi}([\![N]\!]_{\tilde{\Gamma}_1}, [\![\varphi]\!]_{\tilde{\Gamma}_2}) \\
&\quad = [\![dasjenige]\!]_\Gamma([\![N]\!]_\Gamma, v \mapsto [\![\varphi]\!]_{\tilde{\Gamma}_2[v/x]})
\end{aligned}$$

Also ist

$$[\![\varphi^{rel,ind}(x^{rel})]\!]_\Gamma := \begin{cases} \text{der Begriff } B \text{ mit} \\ B(v) = [\![\varphi]\!]_{\Gamma[v/x]}. \end{cases}$$