Attributgrammatik

Sei Fn eine Menge von Funktionssymbolen und $Term_{Fn}$ die Menge der mit den $f \in Fn$ und Variablen $x_1, x_2, \ldots$ aufgebauten Terme.

Eine (synthetische) *Attributgrammatik* $G = (G, F)$ ist eine kontextfreie Grammatik $G = (T, N, P, S)$ mit einer Annotation $F : P \to Term_{Fn}$, die jeder Grammatikregel einen Term

$$F(A \to A_1 \cdots A_n) := s(x_1, \ldots, x_n) \in Term_{Fn}$$

zuordnet. Wir schreiben dafür einfach

$$A(s(x_1, \ldots, x_n)) \to A_1(x_1) \cdots A_n(x_n).$$

Eine *Interpretation* $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, v)$ von (G, F) ist

(i) eine Algebra $\mathcal{A} = (A, \langle f^{\mathcal{A}} \mid f \in Fn \rangle)$ mit Funktionen $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ für n-stellige $f \in Fn$ und

(ii) einer Belegung $v : T \to A$ der Terminalsymbole von G durch Elemente von A.

Termannotation eines Syntaxbaums

Sei $w \in T^*$ ein von der Grammatik erzeugter Ausdruck mit einem Syntaxbaum t. Wir wollen w eine Bedeutung in $\mathcal{I}$ geben, indem wir t einen Term s_t zuordnen und dann dessen Wert in $\mathcal{I}$ nehmen.

Einem Baum t ordnen wir wie folgt einen Term s_t zu:

- Ist t ohne echte Teilbäume (ein Blatt), so sei

  $$s_t := x_i$$

  die nächste noch unbenutzte Variable.

- Ist t aus den direkten Teilbäumen $t_1, \ldots, t_n$ mit der Grammatikregel

  $$A(s(x_1, \ldots, x_n)) \to A_1(x_1) \cdots A_n(x_n)$$

  erzeugt worden, und sind $s_{t_1}, \ldots, s_{t_n}$ die den Bäumen $t_1, \ldots, t_n$ zugeordneten Terme, so sei

  $$s_t := s(s_{t_1}, \ldots, s_{t_n})$$

  der dem Baum t zugeordnete Term.

Beachte, daß $s_t(x_1 \ldots, x_k)$ für jedes seiner k Blätter eine freie Variable enthält.

Attributgrammatik als DCG

Wenn man die Grammatikregeln

$$A(s(x_1, \ldots, x_n)) \to A_1(x_1) \cdots A_n(x_n)$$

im PROLOG-Format

$$a(s(X_1, \ldots, X_n)) \to a_1(X_1), \ldots, a_n(X_n).$$

schreibt, wird die entstehende Definite Clause Grammar (DCG) automatisch in ein PROLOG-Programm mit Programmklauseln

$$a(s(X_1, \ldots, X_n)) \ \texttt{:-}\ a_1(X_1), \ldots, a_n(X_n).$$

übersetzt. Mit diesem Programm kann man Eingaben w syntaktisch analysieren lassen und erhält als Ausgabe den Term s_t eines (nicht explizit aufgebauten) Syntaxbaums t von w.

Algebraische Semantik
einer Attributgrammatik

Definiere für den Syntaxbaum t und die Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, v)$ eine Belegung $h : \mathit{Variable}(s_t) \to A$ durch

$$h(x_i) := v(a),$$

wenn x_i die Variable am Blatt $a \in T$ von t ist.

Mit der Belegung kann dem Term $s_t(x_1, \dots, x_k)$ durch

$$\begin{array}{rcl} [\![x_i]\!]_h^{\mathcal{I}} & := & h(x_i), \\ [\![f(t_1, \dots, t_n)]\!]_h^{\mathcal{I}} & := & f^{\mathcal{A}}([\![t_1]\!]_h^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_n]\!]_h^{\mathcal{I}}) \end{array}$$

$\mathcal{I}$ ein *Wert* oder eine *Bedeutung* $[\![s_t]\!]_h^{\mathcal{I}}$ bei der Interpretation $\mathcal{I}$ zugeordnet werden.

Da die Bedeutungen Elemente einer Algebra $\mathcal{A}$ sind, spricht man von einer *algebraischen* Semantik.

Da h aus v hervorgeht, schreiben wir statt $[\![s_t]\!]_h^{\mathcal{I}}$ auch

$$[\![s_t]\!]^{\mathcal{I}}, \qquad [\![s_t]\!]^{(\mathcal{A},v)}, \qquad [\![s_t]\!]_v^{\mathcal{A}}.$$

Folgerung, Äquivalenz

Verwendet man Boole'sche Algebren, so hat man in der Algebra $\mathcal{A}$ eine partielle Ordnung

$$a \leq^{\mathcal{A}} b :\Longleftrightarrow\ a +^{\mathcal{A}} b = b$$

mit kleinstem Element $0^{\mathcal{A}}$ und größtem Element $1^{\mathcal{A}}$ und kann dann logische Beziehungen zwischen (analysierten) Ausdrücken der Grammatik definieren:

(i) Ein Ausdruck w mit der Analyse t ist *allgemeingültig*, wenn $[\![s_t]\!]^{(\mathcal{A},v)} = 1^{\mathcal{A}}$ für jede Boole'sche Algebra $\mathcal{A}$ und jede Belegung $v : T \to A$.

(ii) Der Ausdruck v mit der Analyse r *folgt* aus dem Ausdruck w mit der Analyse t, wenn

$$[\![s_t]\!]^{\mathcal{A}}_v \leq^{\mathcal{A}} [\![s_r]\!]^{\mathcal{A}}_v$$

für jede Boole'sche Algebra $\mathcal{A}$ und Belegung v.

(iii) Der Ausdruck v mit der Analyse r *ist äquivalent* zum Ausdruck w mit der Analyse t, wenn

$$[\![s_t]\!]^{\mathcal{A}}_v = [\![s_r]\!]^{\mathcal{A}}_v$$

für jede Boole'sche Algebra $\mathcal{A}$ und Belegung v.

Ein Ziel der algebraischen Semantik ist, die Äquivalenz durch *Ausrechnen* von $s_t = s_r$ mit den Axiomen der Boole'schen Algebra nachzuweisen.

Entsprechend kann man für kompliziertere Algebren, z.B. Relationenalgebren oder (2-sortige) Peirce'sche Algebren, vorgehen, sofern es für die Bedeutungen von Aussagen eine Boole'sche Teilalgebra gibt.