Musterlösungen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Formulieren Sie folgende Ausdrücke mathematisch:

- die Menge der Student*innen, die jünger als 23 Jahre sind
- das durchschnittliche Alter der Student*innen
- das Alter der/des ältesten Studierenden
- der/die älteste Studierende

Dabei sei:
S: die Menge der Student*innen
$|S|$: die Größe der Menge S (= Zahl der Student*innen)
$alter(x)$: das Alter der Person x
$\{x|cond(x)\}$: Menge aller x, welche die Bedingung $cond(x)$ erfüllen
$\sum_{x\in X} f(x)$: Summe der Werte der Funktion f für alle x aus der Menge X
$\max_{x\in X} f(x)$: der maximale Wert der Funktion f
$\arg\max_{x\in X} f(x)$: dasjenige x mit dem größten Funktionswert $f(x)$

1a) $\{s \in S \,|\, \text{alter}(s) < 23 \text{ Jahre}\}$

1b) $\frac{1}{|S|} \sum_{s\in S} \text{alter}(s)$

1c) $\max_{s\in S} \text{alter}(s)$

1d) $\arg\max_{s\in S} \text{alter}(s)$

Aufgabe 2: Angenommen Sie finden in einem großen englischen Korpus das Token *New* 1712 Mal, das Token *York* 911 Mal und das Paar *New York* 870 Mal.
Schätzen Sie (a) die bedingte Wahrscheinlichkeit von *York* nach *New* und (b) die Wahrscheinlichkeit von *New* vor *York*.

2a)

$$p(W_2 = \text{York}|W_1 = \text{New}) = \frac{f(\text{New, York})}{f(\text{New})} = \frac{870}{1712} = 0.51$$

2b)

$$p(W_1 = \text{New}|W_2 = \text{York}) = \frac{f(\text{New, York})}{f(\text{York})} = \frac{870}{911} = 0.95$$

Aufgabe 3: zu zeigen: $P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Aus

$$P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \qquad \text{Definition}$$

folgt:

$$P(X|Y)P(Y) = P(X,Y) = P(Y,X) = P(Y|X)P(X) \quad \text{Kettenregel}$$

Somit gilt:

$$P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Aufgabe 4: zu zeigen: $Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E((X - E(X))^2) \\
&= \sum_x p(x)(x - E(X))^2 && \text{Definition} \\
&= \sum_x p(x)(x^2 - 2xE(X) + E^2(X)) && \text{Ausmultiplizieren} \\
&= \sum_x \Big(p(x)x^2 - 2E(X)p(x)x + E^2(X)p(x)\Big) \\
&= \sum_x p(x)x^2 - 2E(X)\sum_x p(x)x + E^2(X)\sum_x p(x) \\
&= E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) && \text{wegen } \sum_x p(x) = 1 \\
&= E(X^2) - E^2(X)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: zu zeigen: $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_x \sum_y p(x,y)\log_2 p(x,y) \\
&= -\sum_x \sum_y p(x,y)\log_2 p(x,y) \\
&= -\sum_x \sum_y p(x,y)\log_2 (p(x)p(y|x)) \\
&= -\sum_x \sum_y p(x,y)\left(\log_2 p(x) + \log_2 p(y|x)\right) \\
&= -\sum_x \sum_y p(x)p(y|x)\log_2 p(x) - \sum_x \sum_y p(x,y)\log_2 p(y|x) \\
&= -\sum_x p(x)\log_2 p(x)\sum_y p(y|x) + H(Y|X) \\
H(X,Y) &= -\sum_x p(x)\log_2 p(x) + H(Y|X) \\
&= H(X) + H(Y|X)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: zu zeigen: $H(Y) - H(Y|X) = I(X;Y)$

$$\begin{aligned}
H(Y) - H(Y|X) &= -\sum_y p(y)\log_2 p(y) + \sum_x \sum_y p(x,y)\log_2 p(y|x) \\
&= -\sum_y \sum_x p(x,y)\log_2 p(y) + \sum_x \sum_y p(x,y)\log_2 p(y|x) \\
&= -\sum_x \sum_y p(x,y)\left(\log_2 p(y) - \log_2 p(y|x)\right) \\
&= -\sum_x \sum_y p(x,y)\log_2 \frac{p(y)}{p(y|x)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 \frac{p(x)p(y)}{p(x,y)} \\
&= \sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \\
&= I(X;Y)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7: zu zeigen: $H(X,Y) = H(X) + H(Y) - I(X;Y)$

$$
\begin{aligned}
H(X) + H(Y) - I(X;Y) &= -\sum_x p(x) \log_2 p(x) - \sum_y p(y) \log_2 p(y) - \sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \\
&= -\sum_x \left(\sum_y p(x,y) \right) \log_2 p(x) - \sum_y \left(\sum_x p(x,y) \right) \log_2 p(y) - \sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \\
&= -\left(\sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 p(x) + \sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 p(y) + \sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \right) \\
&= \sum_x \sum_y \left(p(x,y) \log_2 p(x) + p(x,y) \log_2 p(y) + p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \right) \\
&= -\sum_x \sum_y p(x,y) \left(\log_2 p(x) + \log_2 p(y) + \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \right) \\
&= -\sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 \frac{p(x)p(y)p(x,y)}{p(x)p(y)} \\
&= -\sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 p(x,y) \\
&= H(X,Y)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8: zu zeigen: $I(X;Y) = D(p(x,y) \,||\, p(x)p(y))$

$$
\begin{aligned}
D(p(x,y) \,||\, p(x)p(y)) &= \sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} && \text{Definition} \\
&= I(X;Y) && \text{Definition}
\end{aligned}
$$